ibercursos

Modelo de flujo bidimensional en ríos y estuarios

www.iberaula.es

GOBIERNO DE ESPAÑA | MINISTERIO DE FOMENTO | MINISTERIO DE MEDIO AMBIENTE Y MEDIO RURAL Y MARINO | CEDEX CENTRO DE ESTUDIOS Y EXPERIMENTACIÓN DE OBRAS PÚBLICAS

Grupo de Ingeniería del Agua y del Medio Ambiente | flumen Dinàmica fluvial i enginyeria hidrològica | CIMNE

ibercursos

iber

Modelo de flujo bidimensional
en ríos y estuarios

Esquemas numéricos

GOBIERNO DE ESPAÑA | MINISTERIO DE FOMENTO | MINISTERIO DE MEDIO AMBIENTE Y MEDIO RURAL Y MARINO | CEDEX CENTRO DE ESTUDIOS Y EXPERIMENTACIÓN DE OBRAS PÚBLICAS

Grupo de Ingeniería del Agua y del Medio Ambiente | flumen Dinàmica fluvial i enginyeria hidrològica | CIMNE

Esquemas numéricos

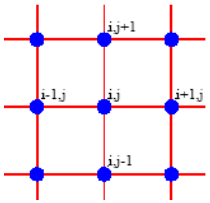
1. Introducción
2. Mallas de cálculo
3. Volúmenes finitos

Métodos numéricos en CFD

- **Volúmenes finitos**
  - Impone **conservación** de forma natural
  - **Flexibilidad** geométrica
  - Resuelve ecuaciones en **forma integral**
  - Discretización muy **intuitiva**

- **Elementos finitos**
  - **Flexibilidad** geométrica
  - **Versátil** (diferentes áreas de aplicación)

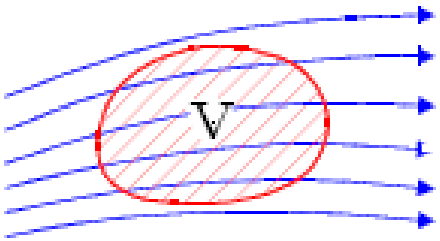
- **Diferencias finitas**
  - Discretización **sencilla**
  - Problemas en geometrías complejas

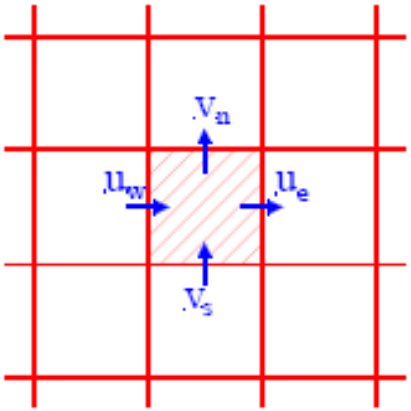


- **Smoothed Particle Hydrodynamics**
  - Adecuado si **superficie libre compleja**
  - Método **sin malla**
  - Coste computacional muy elevado

Introducción

Volúmenes finitos



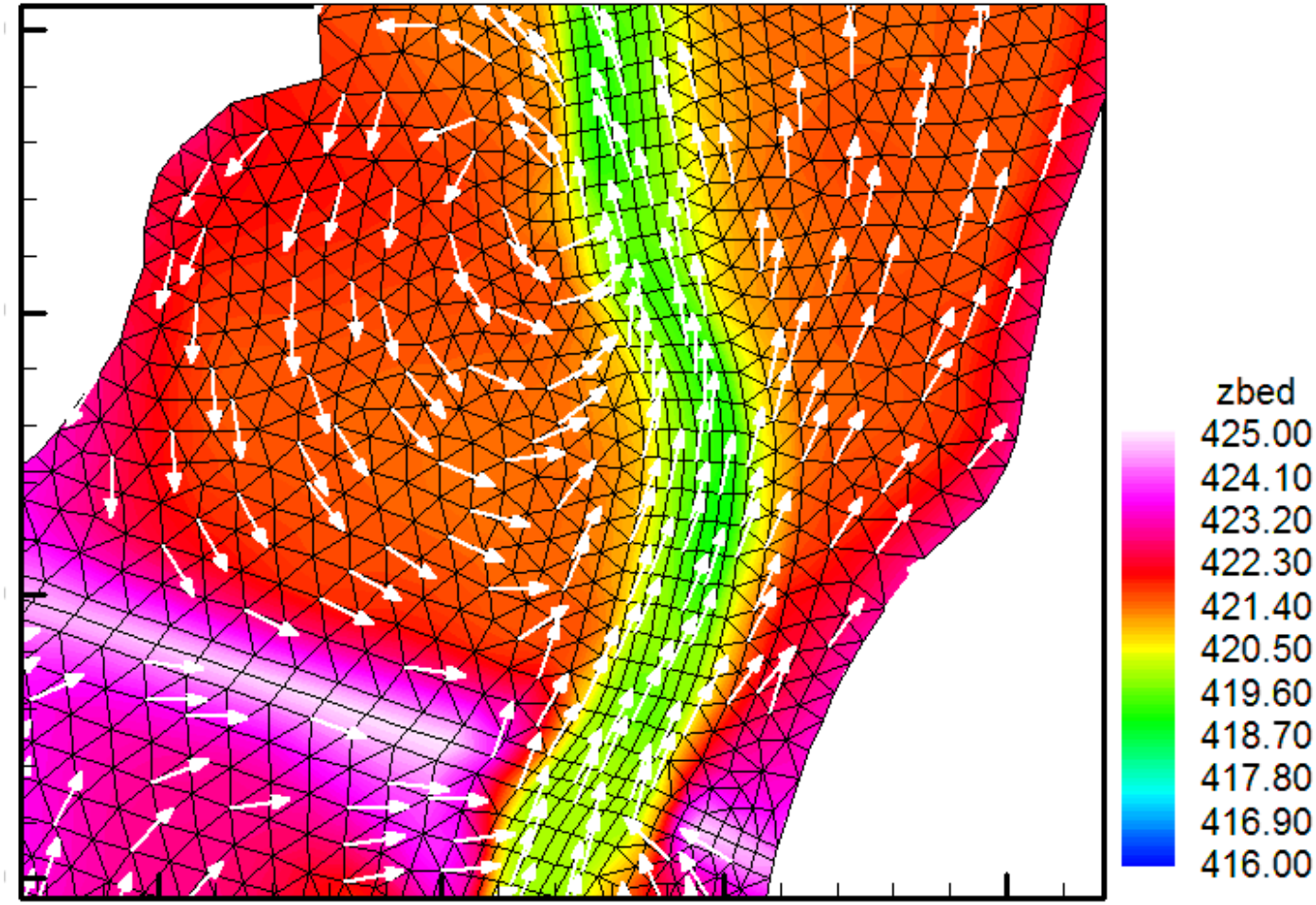


$$Q_E - Q_W + Q_N - Q_S = \frac{dV}{dt}$$

$$(Q\,C)_E - (Q\,C)_W + (Q\,C)_N - (Q\,C)_S = \frac{dM_C}{dt}$$

- Flujo a través de las aristas de las celdas
- Lo que sale de una celda entra en la celda de al lado
- Balance de entrada / salida para cualquier variable

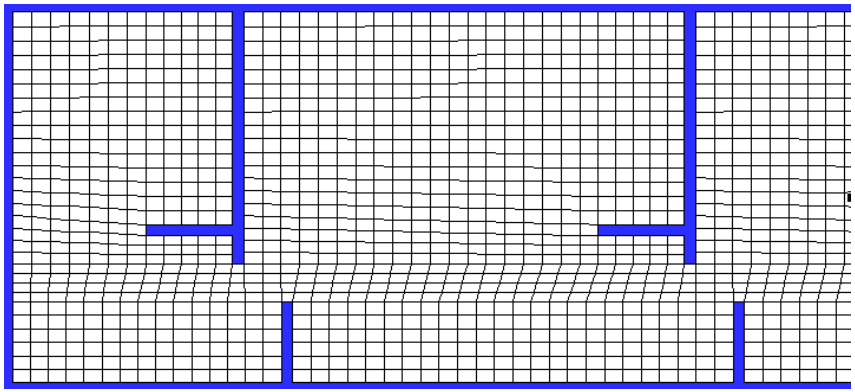
Volúmenes finitos



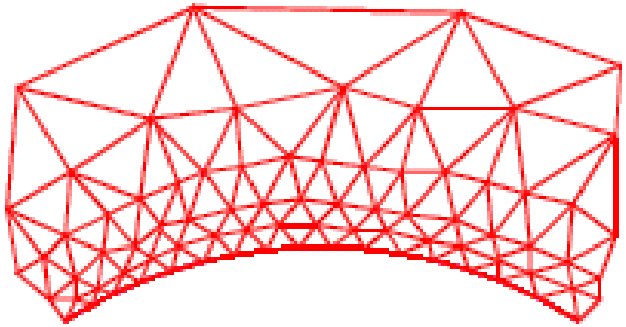
Mallas de cálculo

Tipos de mallas

Malla estructurada por bloques



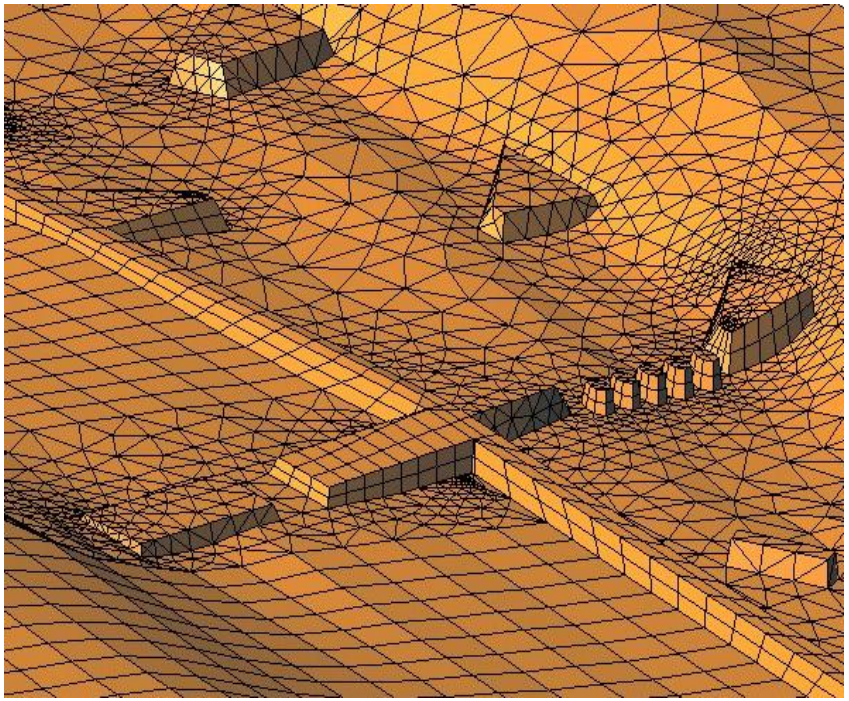
Malla no-estructurada triangular



Mallas de cálculo

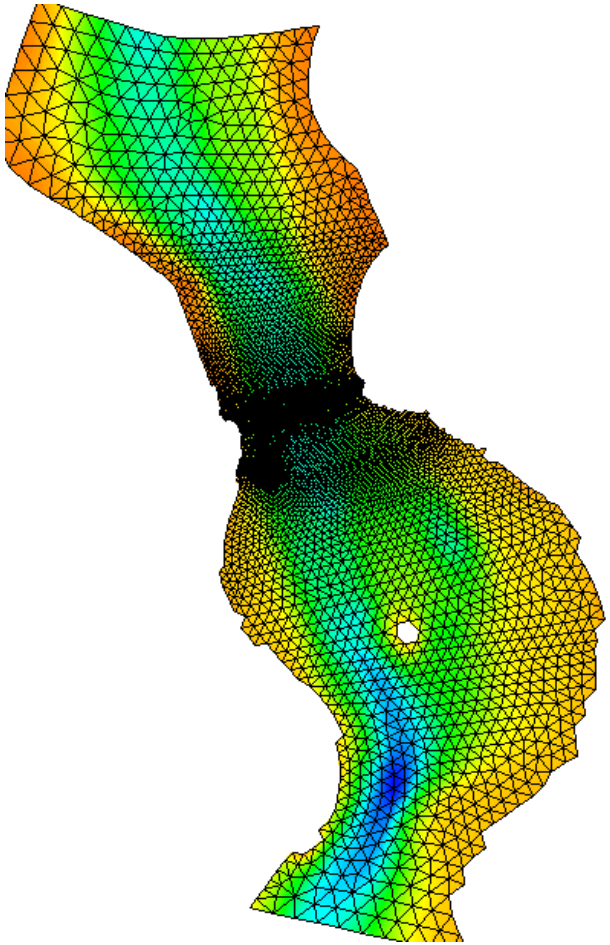
Mallas no estructuradas

Mallas no-estructuradas formadas
por elementos de 3 o 4 lados



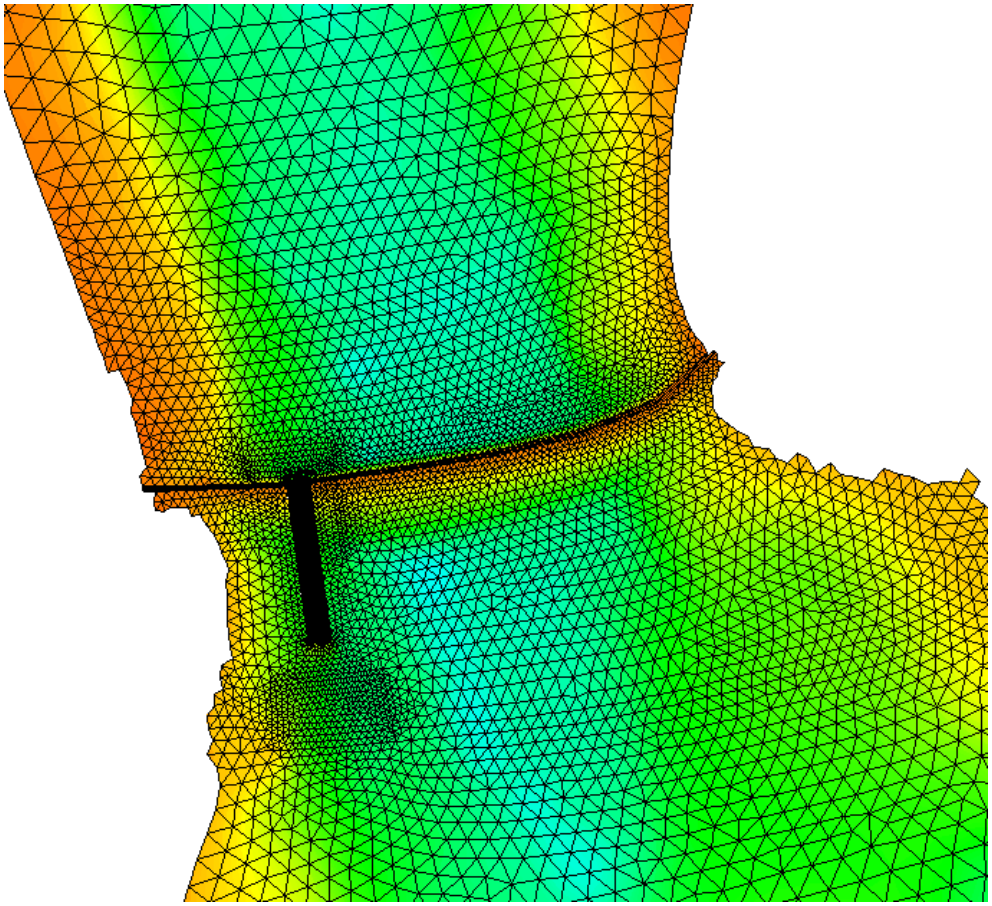
Mallas de cálculo

Mallas no estructuradas



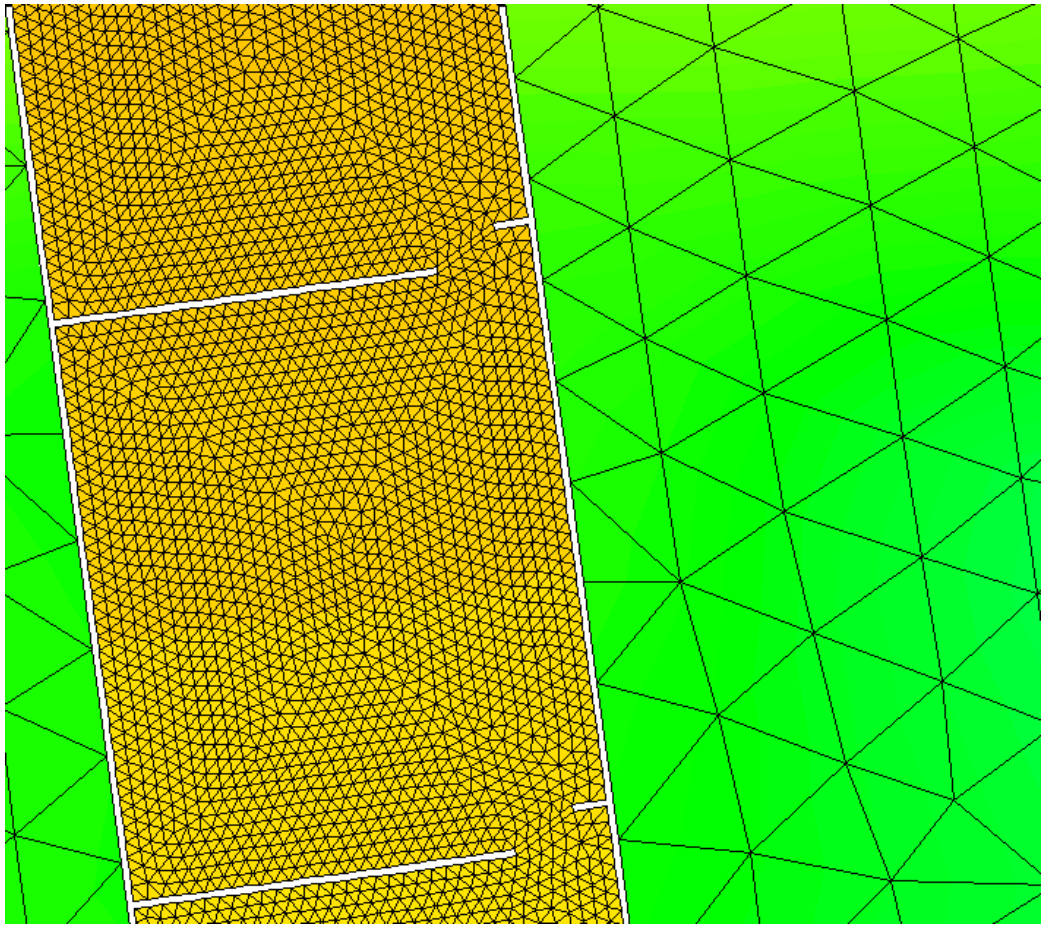
Mallas de cálculo

Mallas no estructuradas



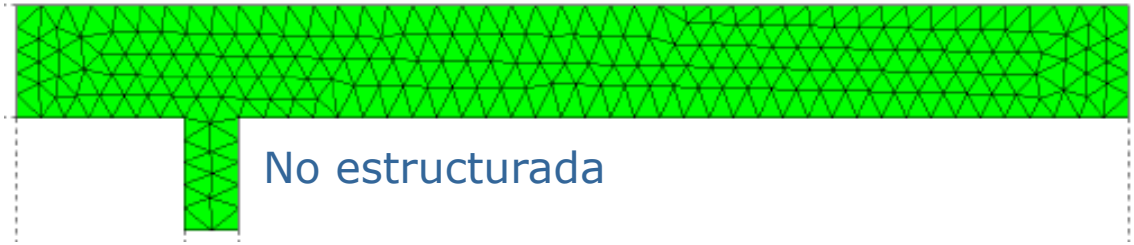
Mallas de cálculo

Mallas no estructuradas



Mallas de cálculo

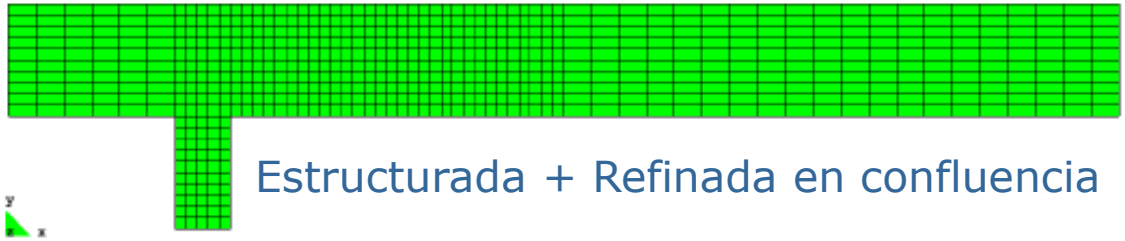
Ejemplos de mallas



No estructurada

Mallado más sencillo

Estructurada



Estructurada + Refinada en confluencia

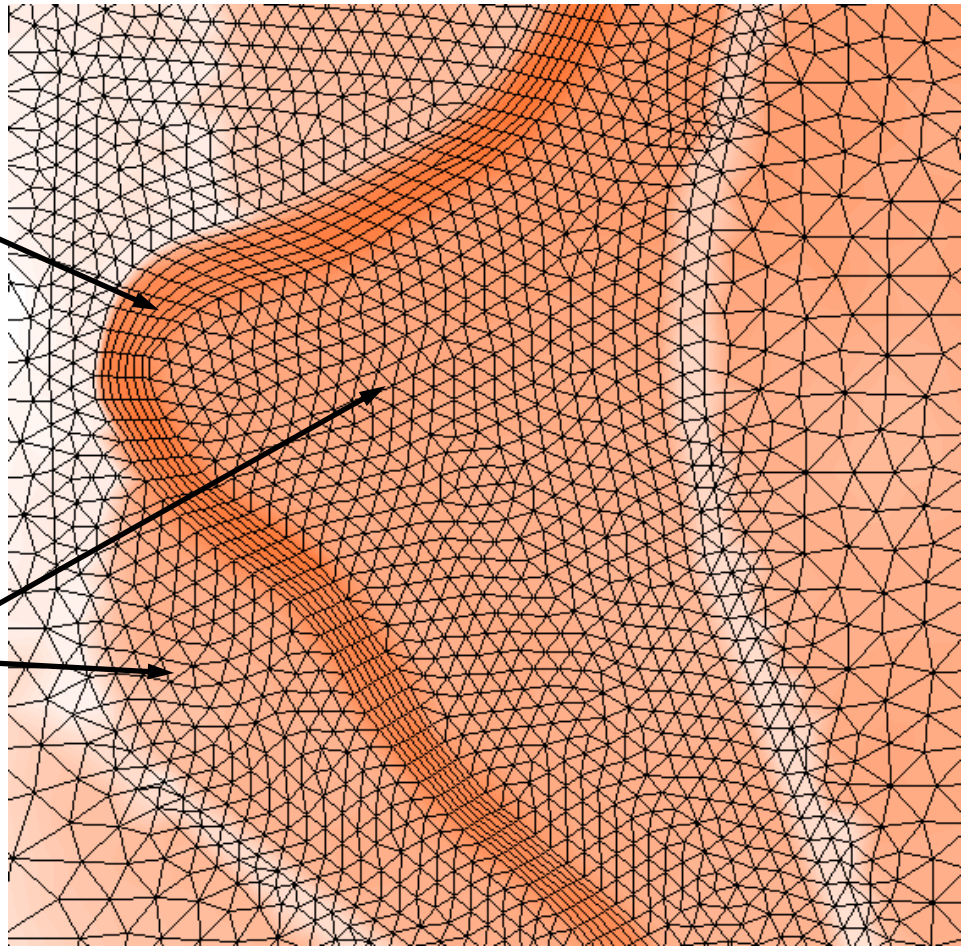
Mallado preferible

Mallas de cálculo

Ejemplos de mallas

Estructurada en cauce principal

No estructurada en llanuras



Tamaño de malla

- Tamaño de malla **función de las características del flujo**
- Malla **más fina** en
  - Recirculaciones
  - Pendientes de fondo elevadas
  - Contracciones / Expansiones
  - Discontinuidades en la batimetría (muros/motas)

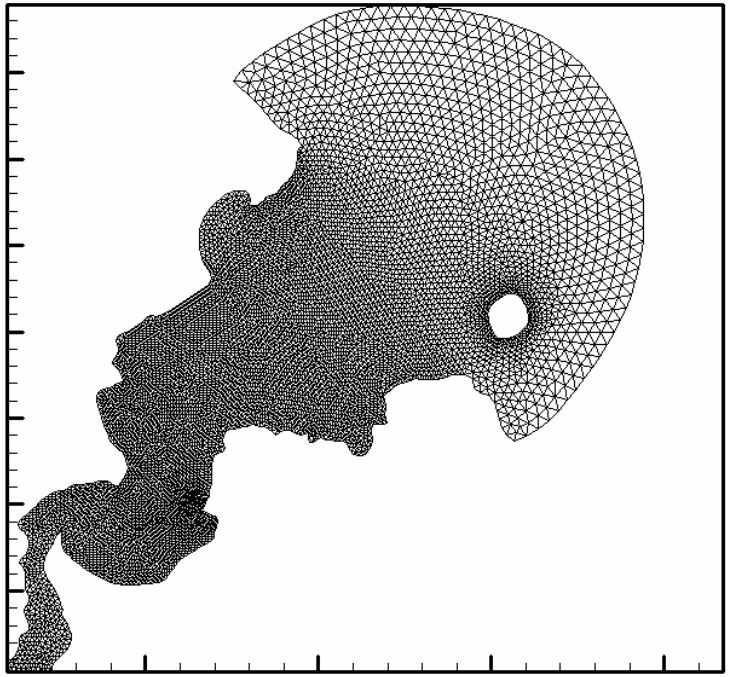
↓

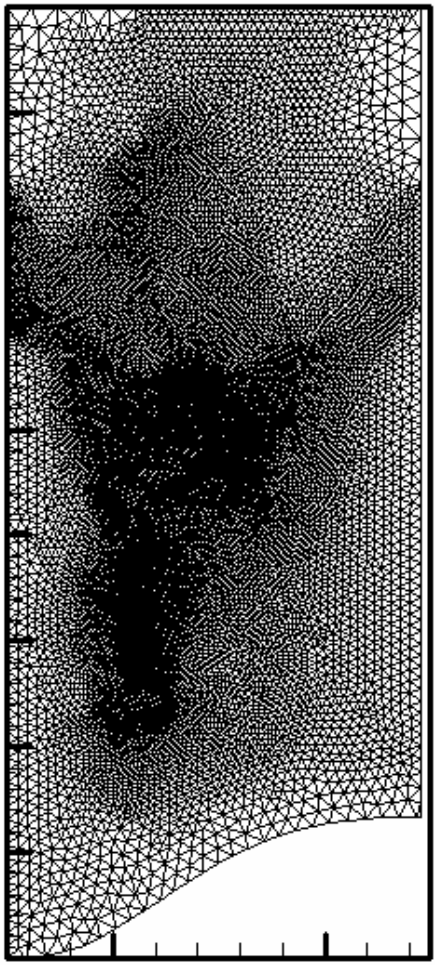
Ventaja para mallas

no estructuradas

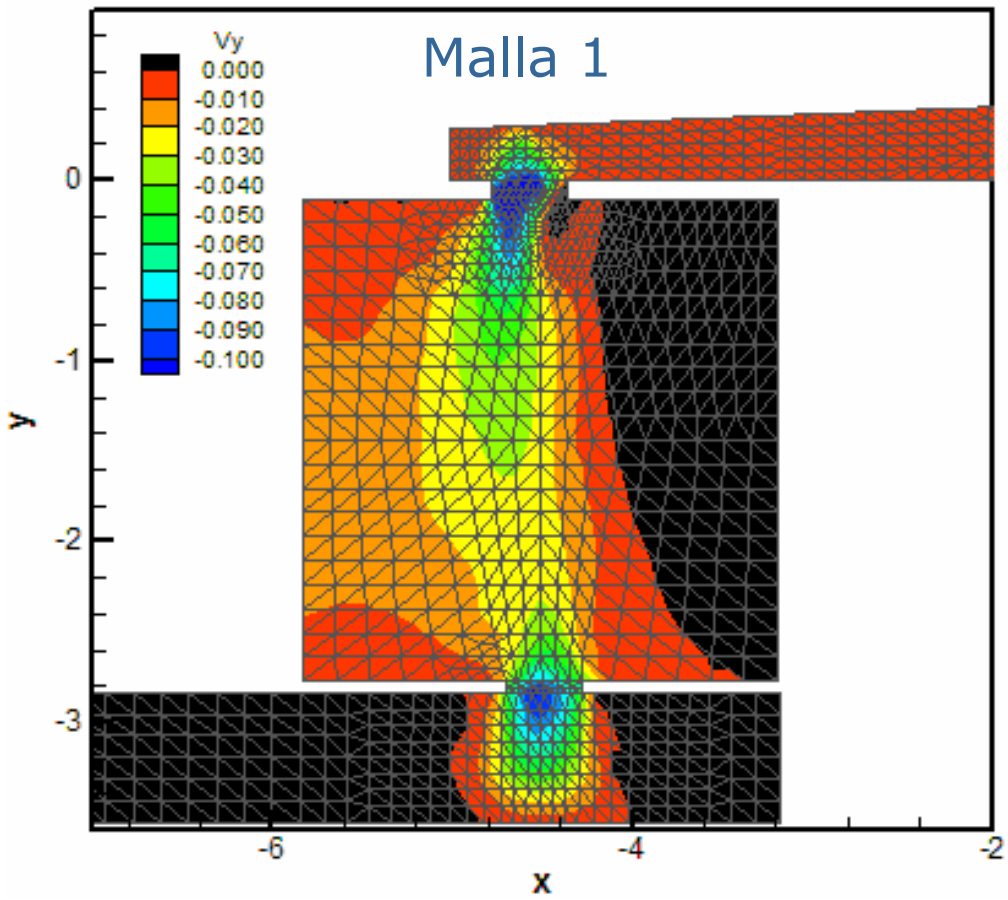
Mallas de cálculo

Tamaño de malla

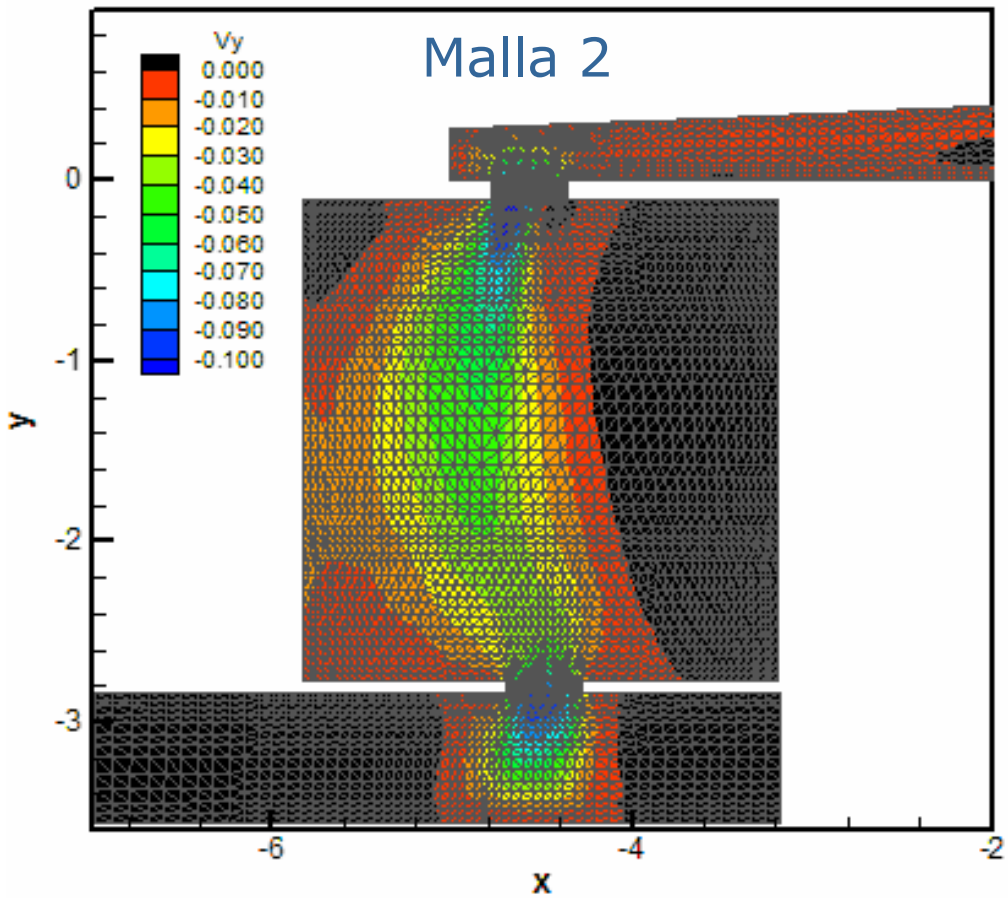




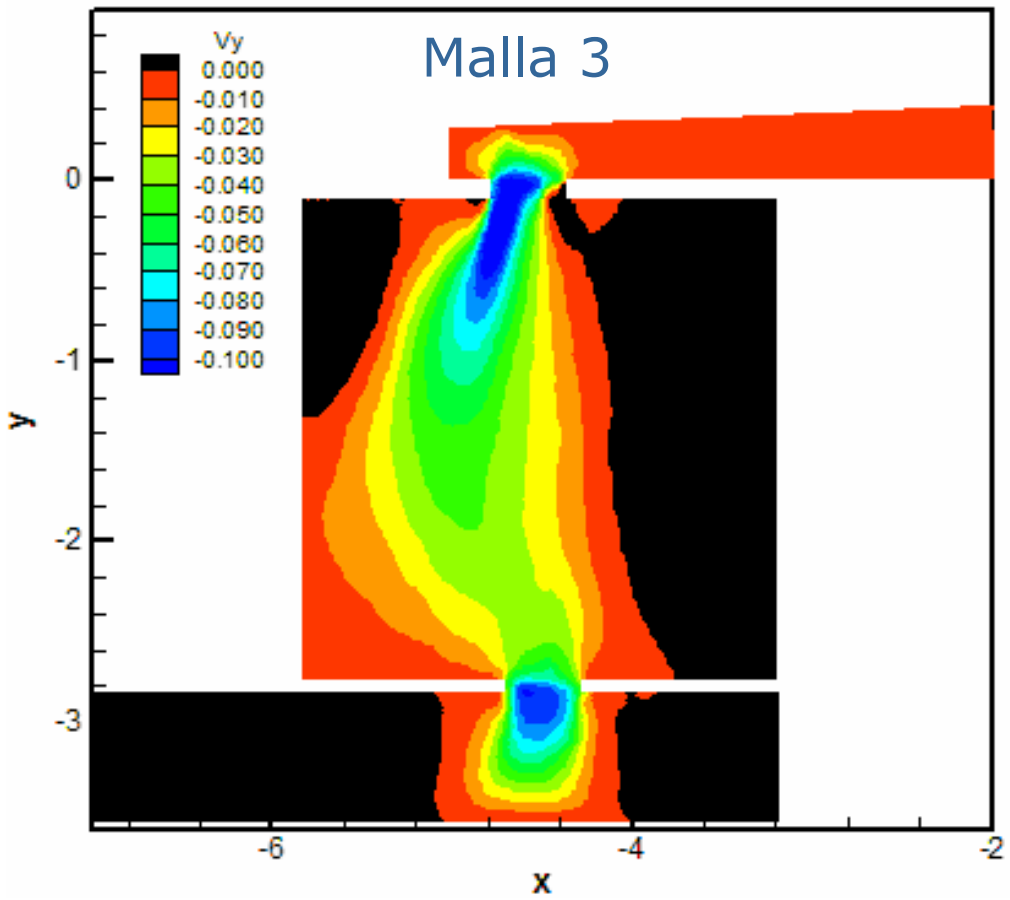
Convergencia en malla



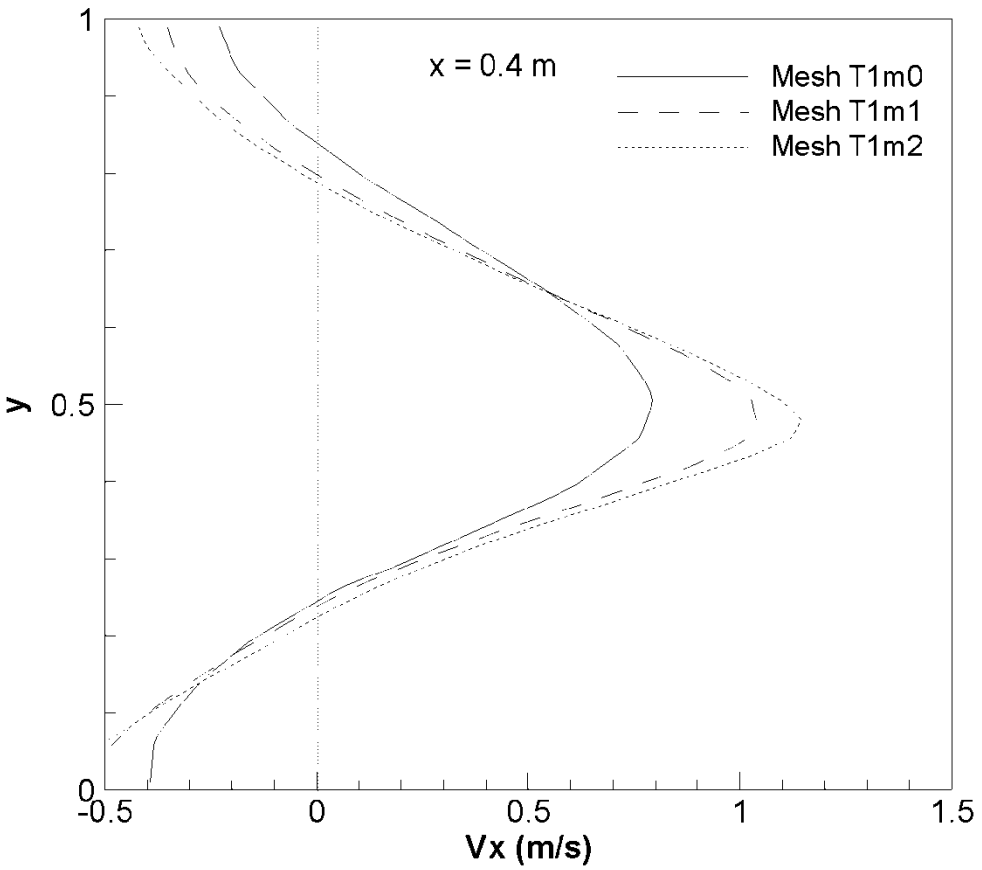
Convergencia en malla



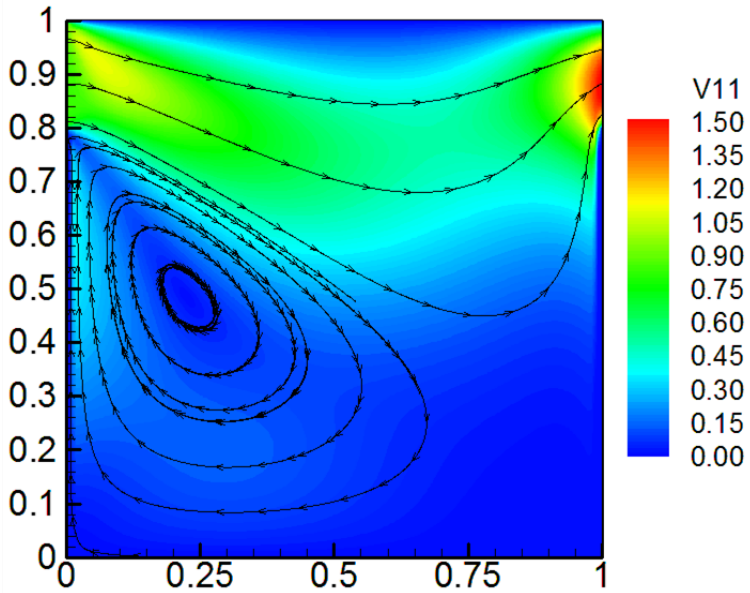
Convergencia en malla

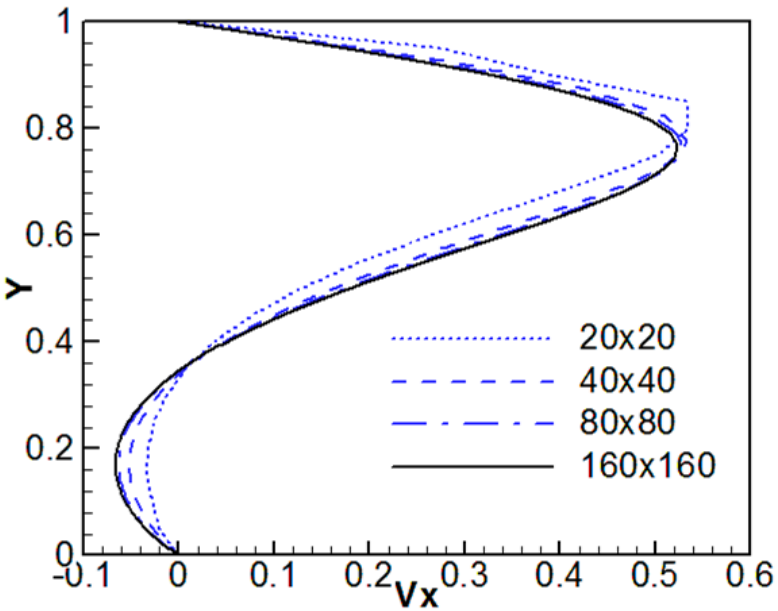


Convergencia en malla



Convergencia en malla



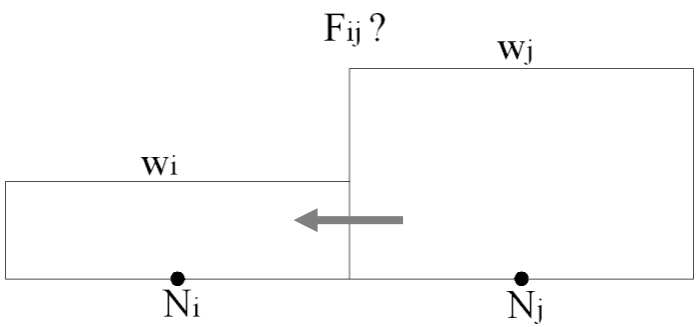


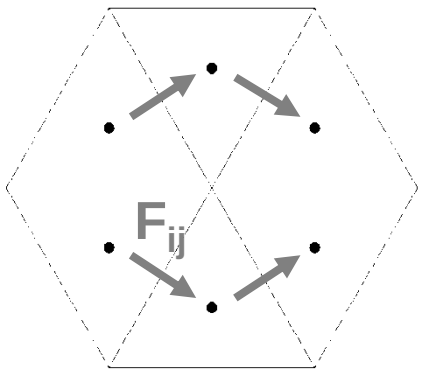
El método de volúmenes finitos

Método conservativo

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \longrightarrow h_i^{n+1} = h_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[Q_{i+1/2} - Q_{i-1/2}\right]$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F(w)}{\partial x} = 0 \longrightarrow w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\right]$$





$F_{i+1/2}$ Flujo a través de las aristas de las celdas

Lo que sale de una celda entra en la celda de al lado

Conservación de masa / momento

El método de volúmenes finitos

Esquemas numéricos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$$

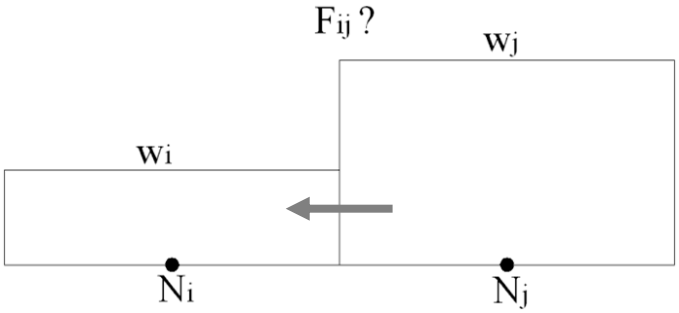
$$F_{i+1/2} = (\phi u)_{i+1/2} - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i+1/2}$$

Convección

$$F_C = \phi u$$

Difusión

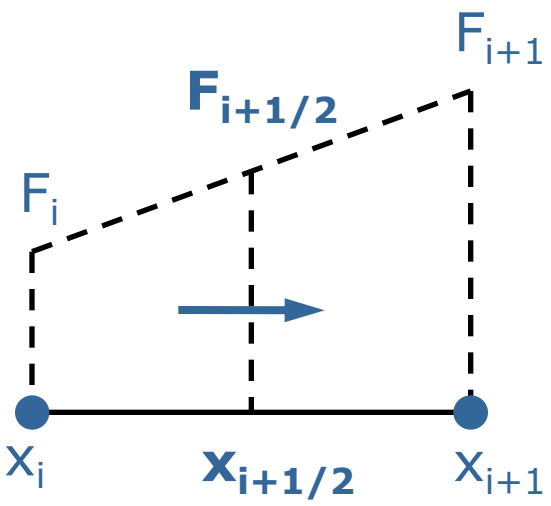
$$F_D = \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}$$



El método de volúmenes finitos

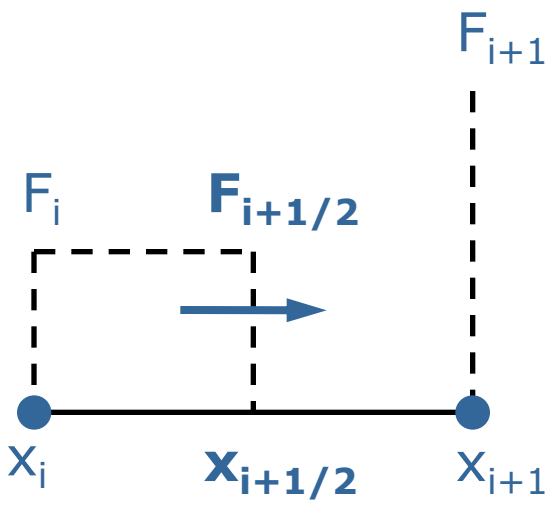
Esquemas numéricos

Discretización del flujo convectivo



Esquema centrado

No considera la dirección en la que se transmite la información

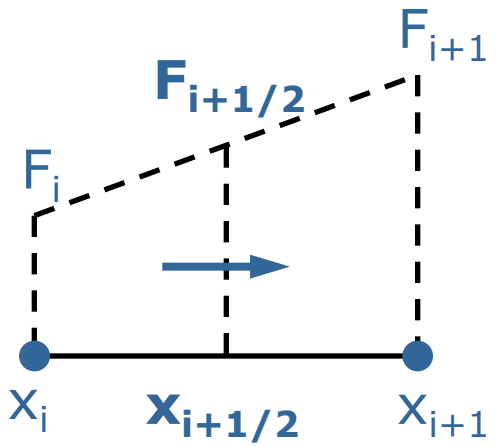


Esquema descentrado

Tiene en cuenta la dirección en la que se transmite la información

El método de volúmenes finitos

Esquema centrado de orden 2



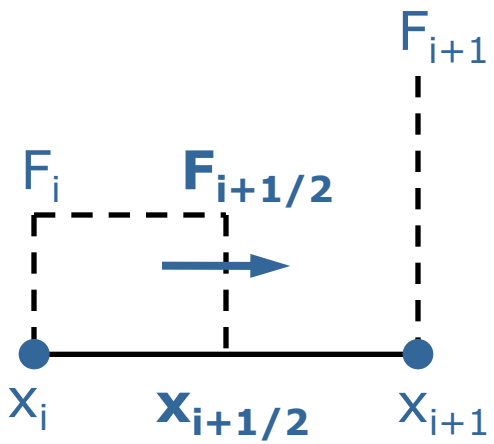
$$Pe = \frac{U\,\Delta x}{\Gamma} < 2 \longrightarrow$$ no genera oscilaciones (inestabilidades)

$$Pe = \frac{\text{Conveccion}}{\text{Difusion}}$$

$$Pe = \frac{U\,\Delta x}{\Gamma} > 2 \longrightarrow$$ genera **oscilaciones** (inestabilidades)

El método de volúmenes finitos

Esquema descentrado de orden 1

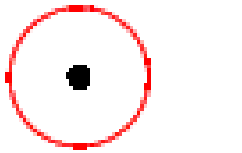


$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\Gamma_n + \Gamma\right) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$$

$$\Gamma_n = \frac{U \, \Delta x}{2}$$

Difusión numérica

- Estabiliza la solución
- Introduce errores



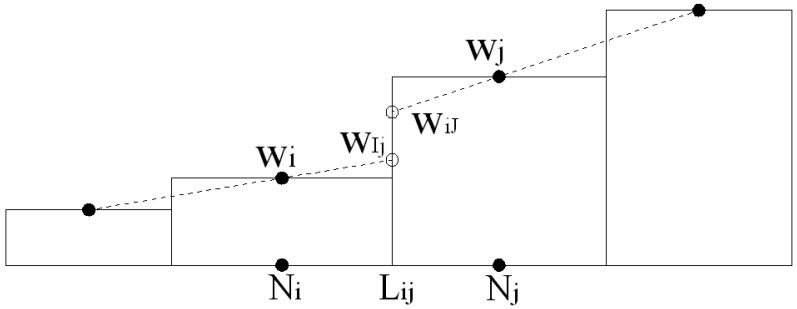
diffusion only

- Esquema numéricamente **estable**
- No genera **oscilaciones** de Φ
- **Muy difusivo**

Esquemas descentrados de orden 2

Esquemas TVD (alta resolución)

- Reducen el valor de la difusión numérica manteniendo la solución estable
- Más precisos, pero menos estables que esquemas orden 1



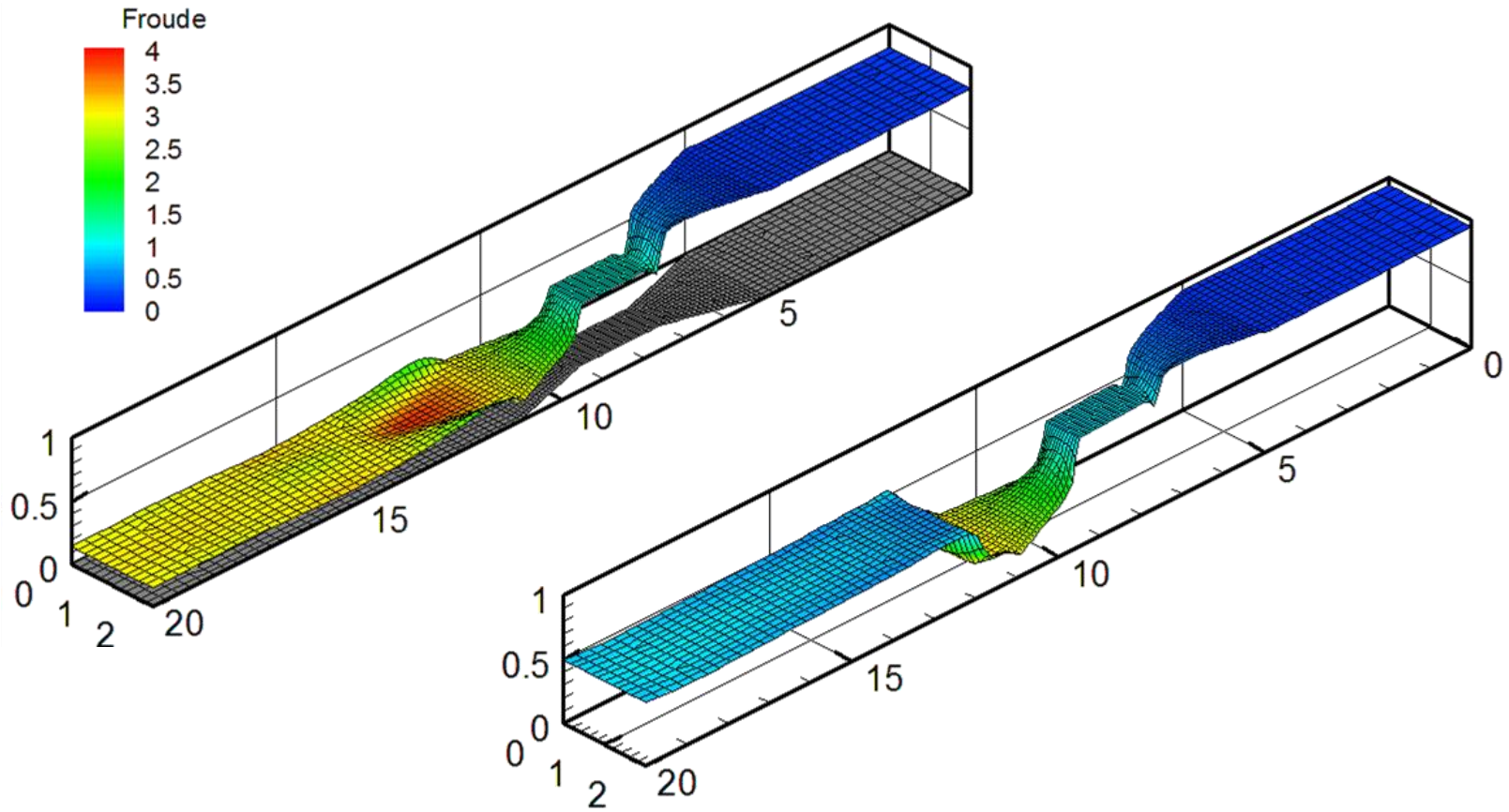
Esquemas en Iber

- Orden 1
- **Minmod (alta resolución)**
- Superbee (alta resolucíón)
- Van Leer (alta resolucíón)

1. Reconstrucción lineal de las variables en cada celda a partir del valor medio en la celda y del gradiente
2. Extrapolación de las variables de nodos a aristas
3. Valores extrapolados se utilizan en vez de los valores nodales en el esquema númérico

El método de volúmenes finitos

Esquema conservativo descentrado de alta resolución



El método de volúmenes finitos

Discretización temporal

Discretización Explicita

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} + \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

Discretización Implícita

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} + \frac{q_i^{n+1} - q_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0$$

Condición CFL

Courant-Friedrichs-Levy

Restricción sobre el paso de integración temporal

$$CFL = \frac{\Delta t}{\Delta x} C < 1 \xrightarrow{\text{Paso de tiempo de cálculo}} \Delta t = CFL \frac{\Delta x}{C} \quad \text{con } CFL < 1$$

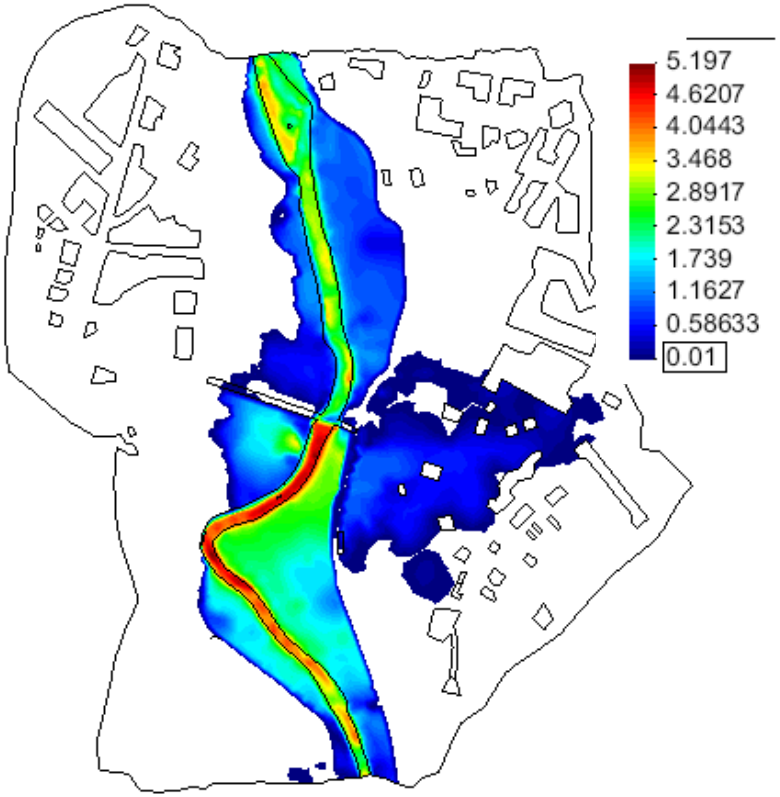
$$CFL = \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(U + \sqrt{g \cdot h}\right) < 1 \xrightarrow{\text{Paso de tiempo de cálculo}} \Delta t = \frac{\Delta x}{U + \sqrt{g \cdot h}} \quad \text{con } CFL < 1$$

El método de volúmenes finitos

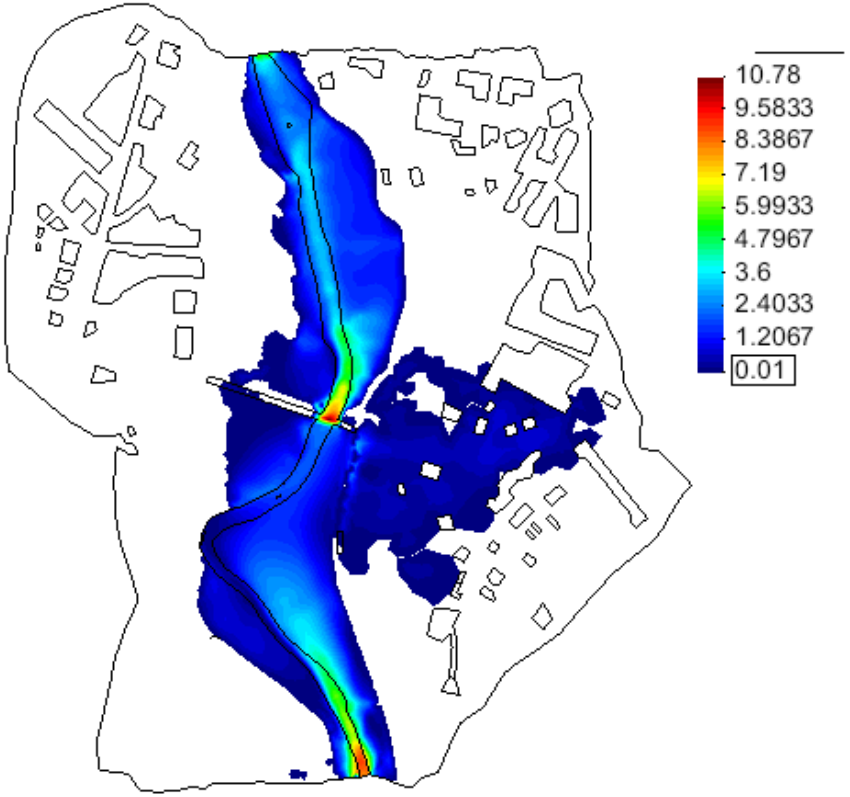
Condición CFL

Paso de tiempo local

calado



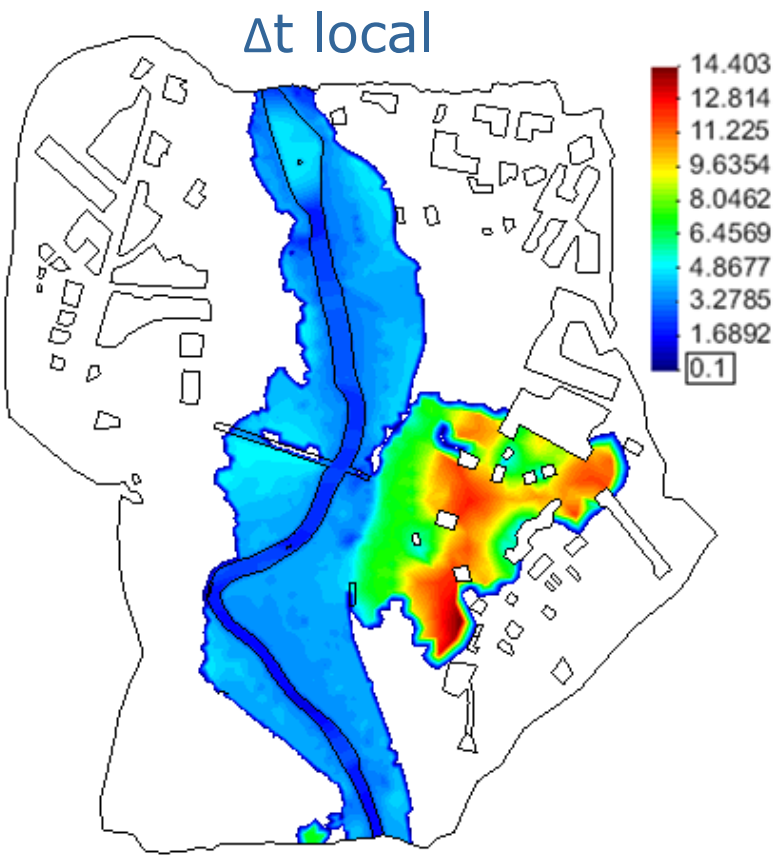
velocidad



El método de volúmenes finitos

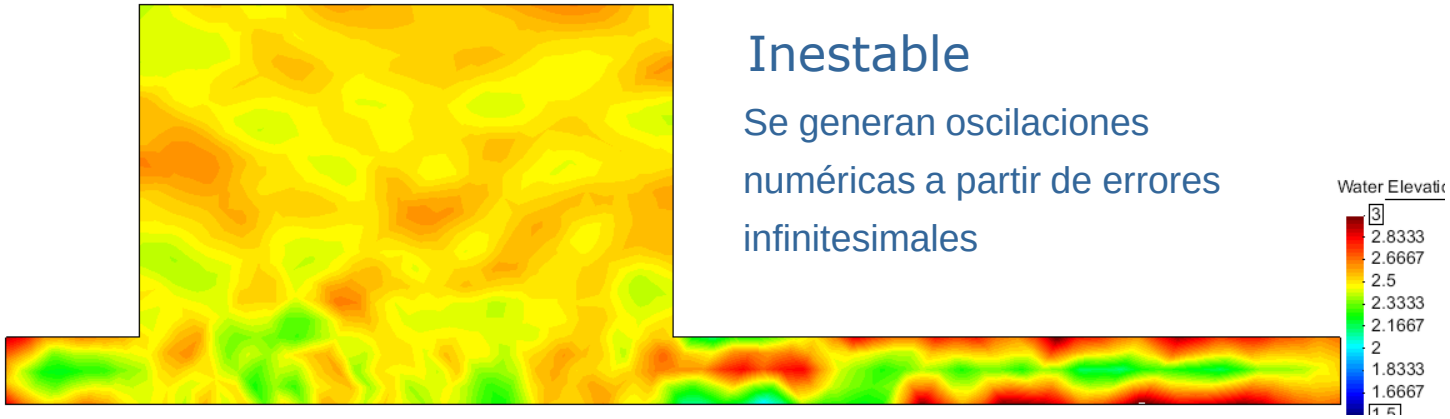
Condición CFL

Paso de tiempo local



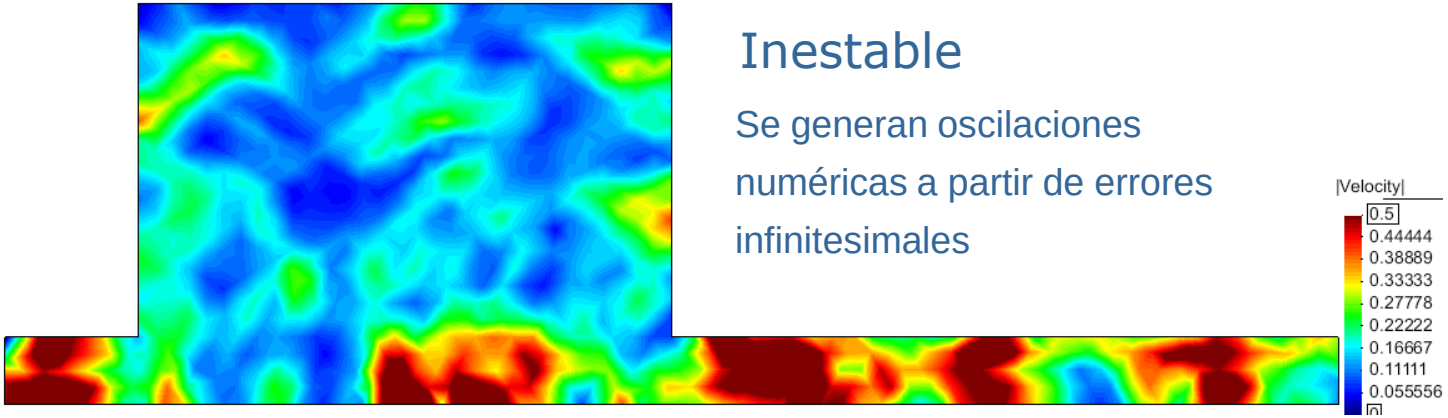
El método de volúmenes finitos

Estabilidad



Inestable

Se generan oscilaciones numéricas a partir de errores infinitesimales

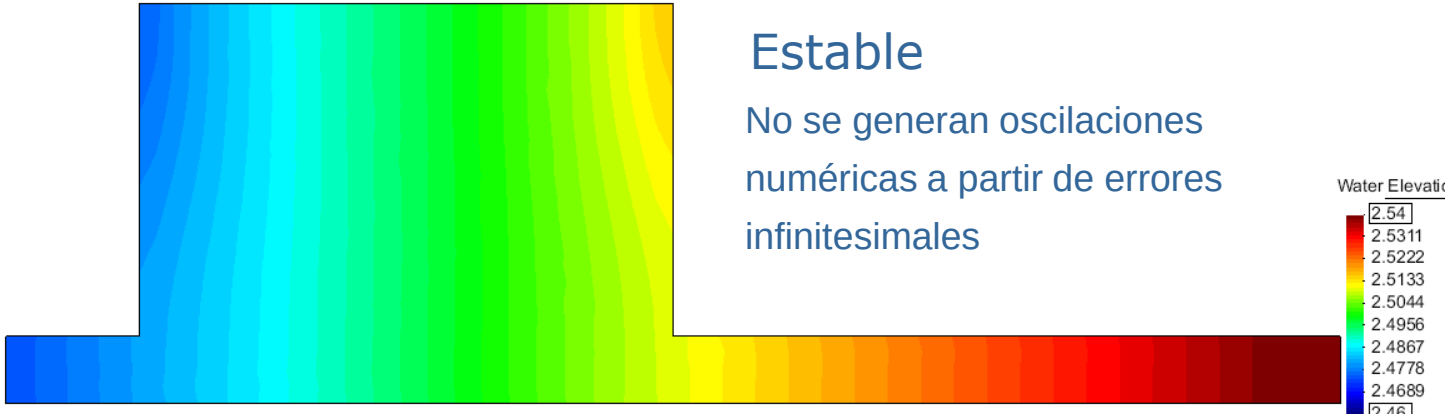


Inestable

Se generan oscilaciones numéricas a partir de errores infinitesimales

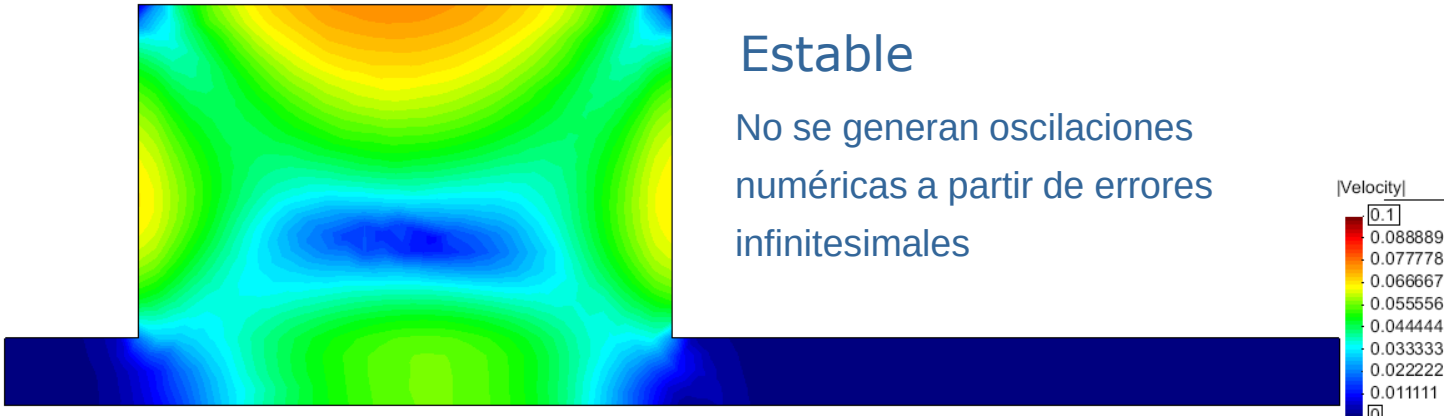
El método de volúmenes finitos

Estabilidad



Estable

No se generan oscilaciones numéricas a partir de errores infinitesimales



Estable

No se generan oscilaciones numéricas a partir de errores infinitesimales

Tiempo de cálculo

- Número de elementos de la malla
- Extensión zona inundada (elementos activos)
- Tamaño de los elementos de la malla
- Campo de velocidades y calado
- CFL
- Orden del esquema numérico
- Número de ecuaciones a resolver

Tamaño de malla

Malla más fina → Resolución más precisa de las ecuaciones de flujo

Mayor tiempo de cálculo

$$\varepsilon_{orden\ 1} \propto \Delta x \qquad \varepsilon_{orden\ 2} \propto (\Delta x)^2$$

Modelos 2D →

$$\Delta x \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$N = 4 \cdot N \rightarrow \varepsilon_{orden\ 1} \approx \frac{\varepsilon_{orden\ 1}}{2}$$

$$N = 4 \cdot N \rightarrow \varepsilon_{orden\ 2} \approx \frac{\varepsilon_{orden\ 2}}{4}$$

$$T_{calculo} \propto \frac{N}{\Delta x}$$

Modelos explícitos 2D →

$$\Delta x \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$N = 2 \cdot N \rightarrow T_{calculo} \approx 3 \cdot T_{calculo}$$

$$N = 4 \cdot N \rightarrow T_{calculo} \approx 8 \cdot T_{calculo}$$

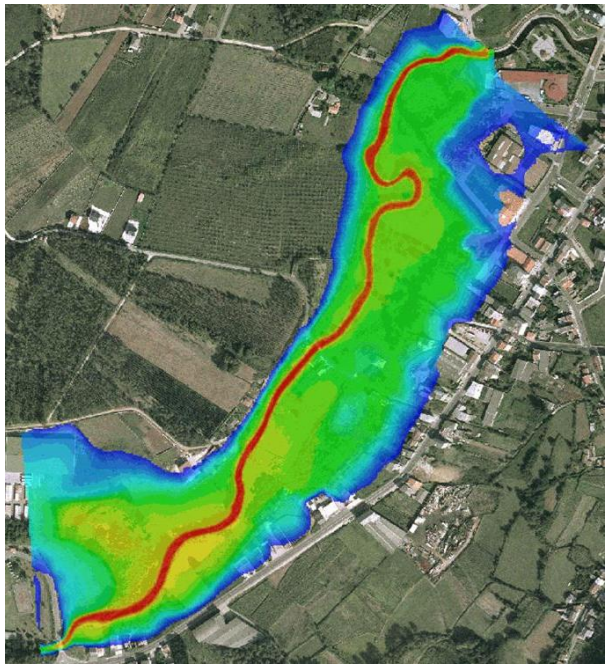
$$N = k \cdot N \rightarrow T_{calculo} \approx k^{1.5} \cdot T_{calculo}$$

El método de volúmenes finitos

Contornos cerrados (pared)

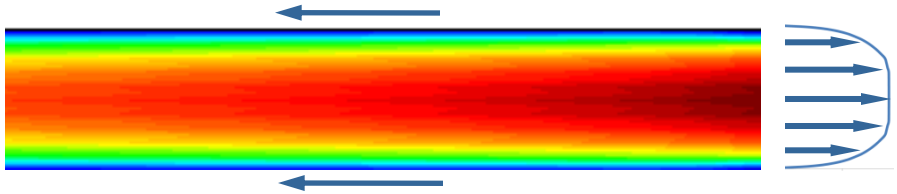
Deslizamiento libre

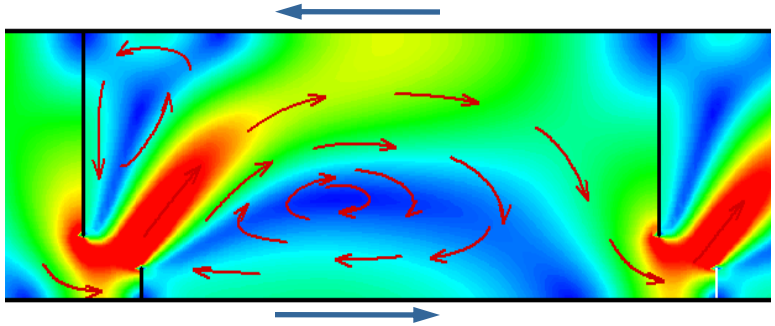
Ríos, zonas costeras



Fricción de pared

Canales, estructuras hidráulicas





Contornos cerrados (pared)

Fricción de pared

Rugosidad de pared

K_s (m)

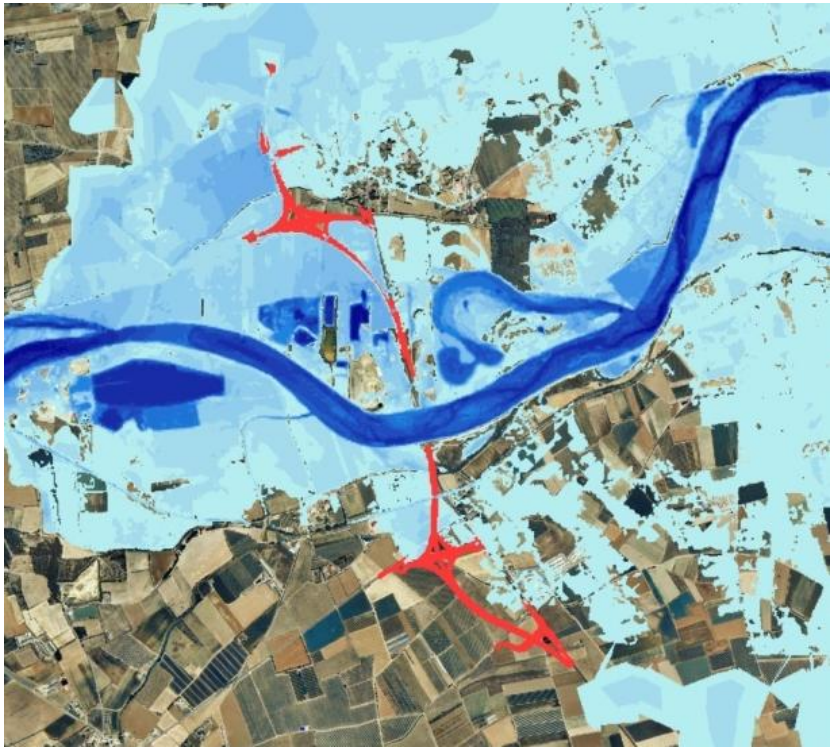
$$U = \frac{u_*}{0.41} Ln\left(E \cdot y^+\right) \longrightarrow \tau_w = \rho u_*^2$$

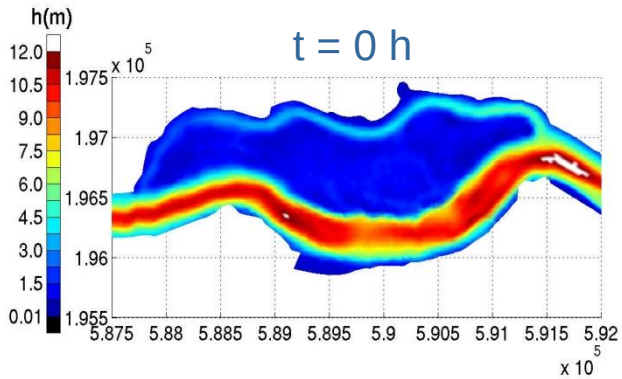
Tipo de régimen	$K_S^+ = \frac{K_S u_*}{\nu}$	$\lvert u \rvert = \frac{u_*}{\kappa} Ln\left(E \cdot y^+\right)$
Turbulento liso	$K_S^+ < 5$	$E = 9.0$
Turbulento rugoso	$5 < K_S^+ < 70$	$E = \frac{30}{K_S^+}$
Transición liso-rugoso	$K_S^+ > 70$	$E = \frac{1}{0.11 + 0.033 \cdot K_S^+}$

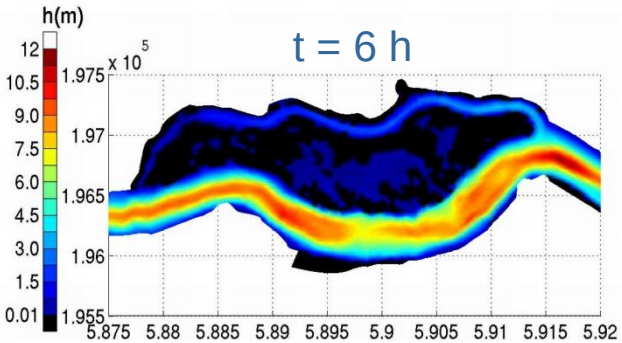
Requiere una malla de pared fina $\longrightarrow$ $y^+ = \frac{y_n \cdot u_*}{\nu} \leq 100$

Frentes de inundación

Parámetro ε_{wd} para definir el frente seco-mojado





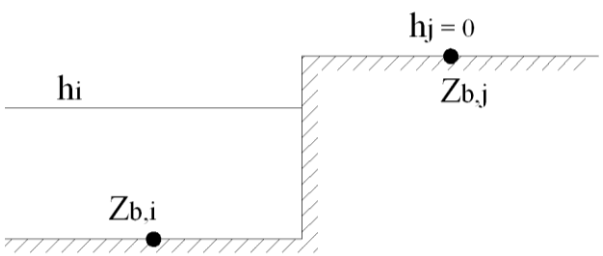


Frentes de inundación

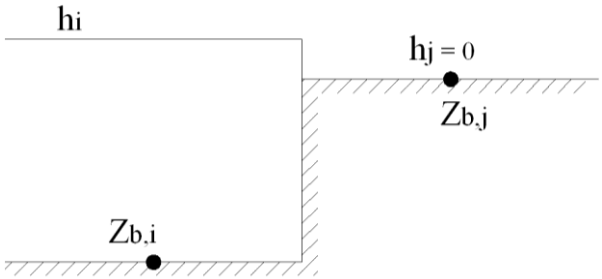
Muy importante que el **esquema numérico** sea **eficaz** →

- Identificar frente seco-mojado (ε_{wd})
- Calados muy pequeños → posibles inestabilidades
- Evitar pérdidas de masa

$wse_i < Z_{b,j}$

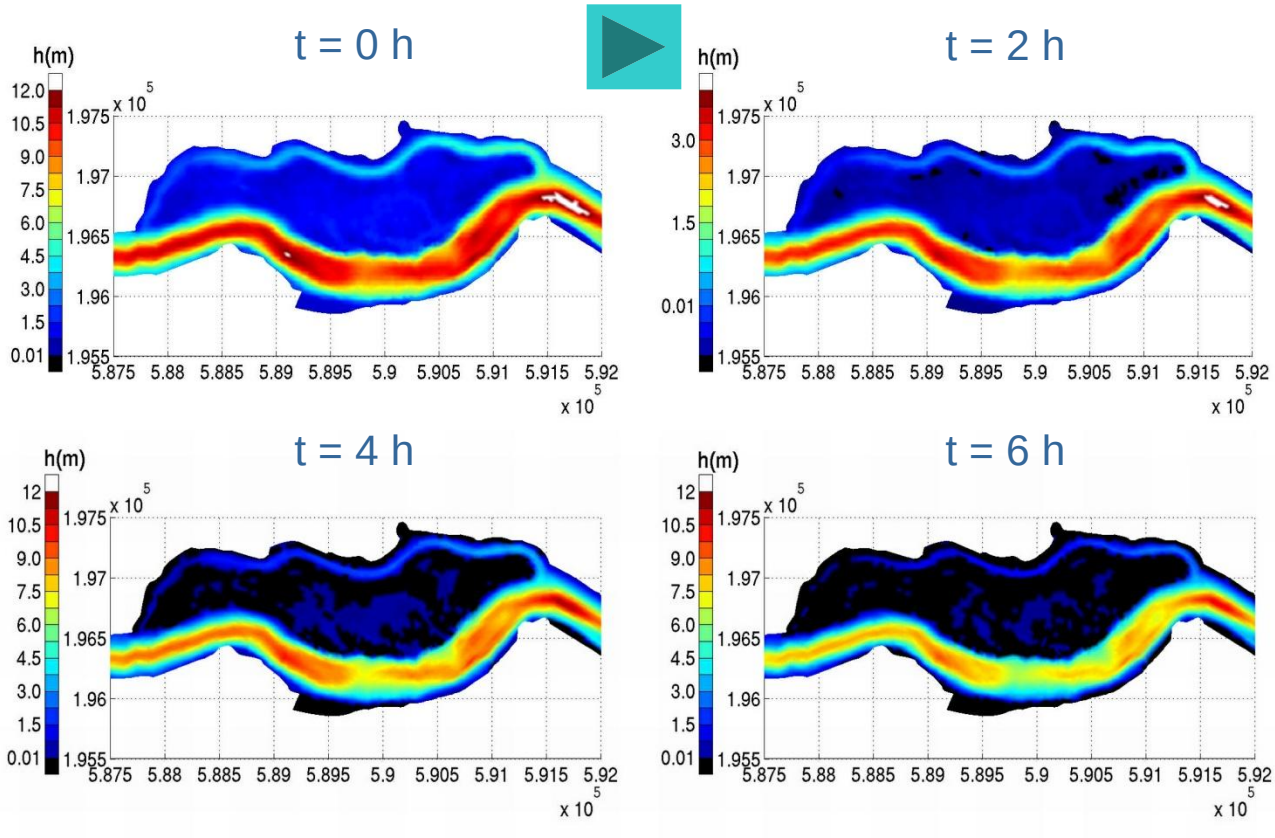


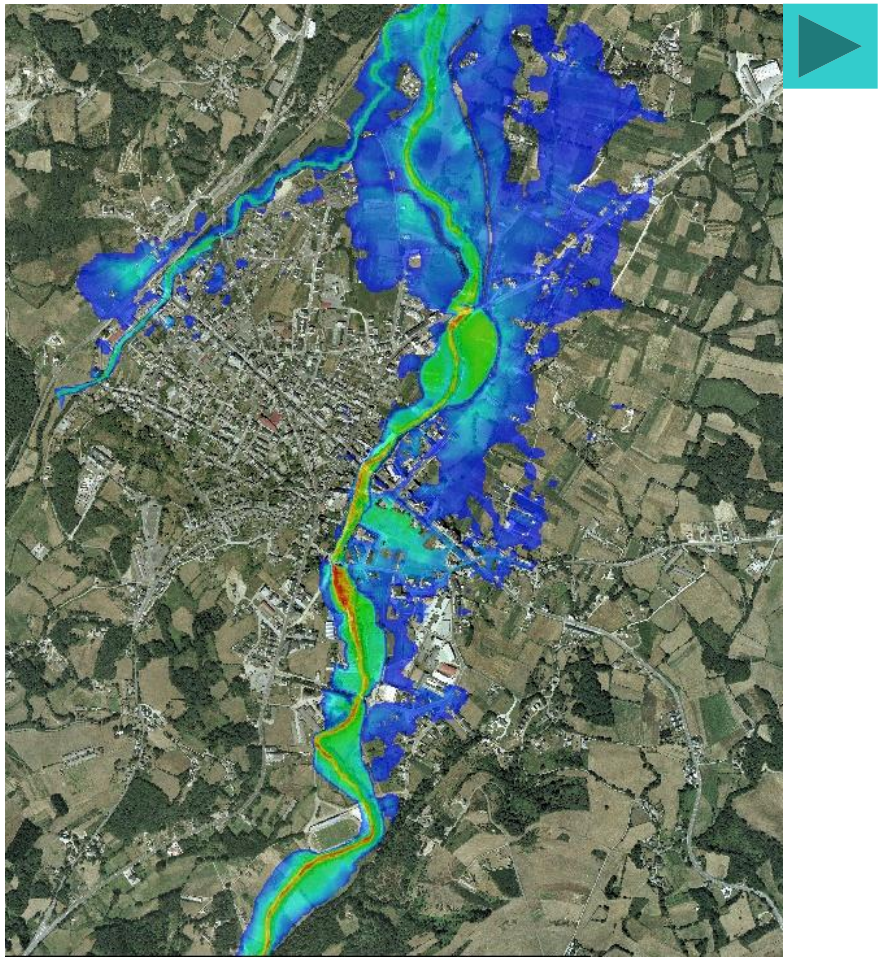
$wse_i > Z_{b,j}$



El método de volúmenes finitos

Frentes de inundación



El método de volúmenes finitos

Frentes de inundación